http://math.uni.lu/parlier/ hugo.parlier@uni.lu

Exercices 7

1. Trouver (et justifier) toutes les limites possibles de sous-suites des suites de termes généraux suivants :

a) $\frac{\sqrt{2}}{n^2}$

b) $((-1)^n + 1)\frac{1}{n^2+1}$

c) $\cos(n\frac{\pi}{6})$

d) $((-1)^n - 1)\sqrt{n}$

e) $(\cos(n\pi) - 1)\frac{3n^3+2n-9}{2(n+2)(1+n^2)}$

2. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.

a) Montrer qu'il existe une suite (p_n) qui prend comme valeur tout les rationnels dans l'interval $]a, b[$ exactement une fois.

b) Montrer qu'il existe une suite (q_n) qui prend comme valeur tout les rationnels dans l'interval $[a, b[$ exactement une fois.

c) Trouver la liste de limites de sous-suites de (p_n).

d) Trouver $\limsup p_n$ et $\liminf p_n$.

3. Existe-t-il une suite (s_n) qui a $]0, 1[$ comme ensemble des limites de ses sous-suites ?

4. Soit (s_n) une suite de termes positifs ou nuls. Pour chaque $n \geq 1$ définissons

$$\sigma_n = \frac{1}{n}(s_1 + \ldots + s_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k.$$

a) Montrer que

$$\liminf s_n \leq \liminf \sigma_n \leq \limsup \sigma_n \leq \limsup s_n.$$

b) Montrer que si $\lim_{n\to\infty} s_n$ existe alors $\lim_{n\to\infty} \sigma$ existe. Dans ce cas, quelle est la relation entre les deux limites ?

c) Trouver un exemple où (σ_n) admet une limite mais pas (s_n).

5. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n}}$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(n!)^{\frac{1}{n}}$